# 高树期末助攻讲座

电气513 李志祥

# 第一章 函数 极限 连续

# 基本内容

## 数列极限

- 数列极限的定义
- 收敛数列的性质：唯一性、有界性、保号性、保序性、夹逼性
- 数列的审敛准则：单调有界准则、归并原理、Weierstass定理
  Cauchy收敛原理

# 基本内容

## 函数极限（要求弱化）

- 函数极限的定义
- 函数极限的性质：唯一性、局部有界性、局部保号性、局部保序性、夹逼性
- 函数极限的存在准则：单调有界准则、Cauchy收敛原理

# 基本内容

## 无穷小量

- 无穷小量的定义
- 无穷小量的性质
- 无穷小的阶
- 无穷小的等价代换(熟记常用的无穷小等价代换)
- 无穷大量

# 基本内容

## 连续函数

- 函数连续的定义
- 间断点及其分类
- 连续函数的运算性质与初等函数的连续性
- 闭区间上连续函数的性质：有界性、最大最小值定理、零点存在定理、介值定理
- 函数的一致连续性

# 注意

- 两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$
- 常用无穷小的等价代换：

$\sin x\sim x\sim\tan x$　　$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$　　$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$e^x-1\sim x$　　$\ln(x+1)\sim x$　　$x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3$

$\tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3$　　$a^x-1\sim x\ln a$　　$x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2$

## 重点题型一：判断数列收敛与数列极限的求解

### 常用方法：

- 利用数列极限的定义
- 利用夹逼性
- 利用单调有界准则
- 利用Cauthy收敛原理

## 重点题型一：判断数列收敛与数列极限的求解

例1：证明数列 $a_n=\dfrac{1+\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}$ 收敛并求其极限值.

解：　利用夹逼性，因为

$$1\le a_n\le\frac{n\sqrt[n]{n}}{n}=\sqrt[n]{n}$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ ，由夹逼性知 $\{a_n\}$ 收敛，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ .

## 重点题型一：判断数列收敛与数列极限的求解

例2：设 $x_1=1, x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ ，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限

解法一（重点掌握）：利用单调有界准则

因为 $x_n=2-\frac{1}{1-x_{n-1}}<2,\quad x_n>0$ ，所以 $\{x_n\}$ 有上界.

又 $x_2-x_1=\frac{1}{2}>0$ ，假设 $x_k-x_{k-1}>0$ ，则

$$x_k-x_{k-1}=\frac{x_{k-1}-x_{k-2}}{(1+x_{k-1})(1+x_{k-2})}>0$$ 所以 $\{x_n\}$是严格单调增的，

所以 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ ，对递推关系式两端取极限得

$a=1+\frac{a}{1+a}$ ，解得 $a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

## 重点题型一：判断数列收敛与数列极限的求解

例2：设 $x_1=1, x_n=1+\dfrac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限

解法二：利用极限的定义

设数列 $\{x_n\}$ 收敛，并记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，

对递推关系式两端取极限得 $a=1+\dfrac{a}{1+a}$，解得 $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

再利用极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$$|x_n-a|=\left|(1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}})-(1+\frac{a}{1+a})\right|=\frac{|x_{n-1}-a|}{(1+a)(1+x_{n-1})}\le\frac{1}{1+a}|x_{n-1}-a|\le\cdots\le\frac{1}{(1+a)^{n-1}}|x_1-a|\le\frac{1}{(1+a)^{n-2}}$$

任给 $\varepsilon\in(0,1)$，由不等式 $|x_n-a|\le\dfrac{1}{(1+a)^{n-2}}<\varepsilon$ 解得 $n>\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+a)}+2.$

取 $N=[\dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln(1+a)}]+2.$，则 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$

# 重点题型一：判断数列收敛与数列极限的求解

例2：设 $x_1=1, x_n=1+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ ，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限

- 解法三：利用Cauthy收敛原理
- $\forall p\in N_+$,注意到$x_n\geq 1$，有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\frac{\left|x_{n+p-1}-x_{n-1}\right|}{(1+x_{n+p-1})(1+x_{n-1})}\leq\frac{1}{4}\left|x_{n+p-1}-x_{n-1}\right|\leq\frac{1}{4^2}\left|x_{n+p-2}-x_{n-2}\right|\leq\frac{1}{4^{n-1}}\left|x_{p+1}-x_1\right|\leq\frac{1}{4^{n-1}}$$

所以$\{x_n\}$是Cauchy数列，故收敛.

# 重点题型二：判断间断点及其类型

例3：讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x} & x<0\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4} & x>0\end{cases}$的间断点及其类型.

解：间断点有 $0,-1,2k+1(k=-2,-3,-4\cdots),2$，下面分别讨论：

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\sin\frac{\pi}{x^2-4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=0,\qquad x=0\text{为跳跃间断点}$$

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\frac{2}{\pi},\qquad x=-1\text{为可去间断点}$$

$$\lim_{x\to2k+1}f(x)=\lim_{x\to2k+1}\frac{x(1+2k+1)}{\cos\frac{\pi}{2}(2k+1)}=\infty,\qquad x=2k+1(k=-2,-3,-4\cdots)\text{为无穷间断点}$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\sin\frac{\pi}{x^2-4}\text{不存在},x=2\text{为震荡间断点}$$

# 重点题型三：求渐近线

## 基本方法

1.若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$，则$x=x_0$为垂直渐近线；

2.若 $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)=a$，则$y=a$为水平渐近线；

3.若 $\lim\limits_{x \to \pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$，则$y=ax+b$为斜渐近线；

其中，$a=\lim\limits_{x \to \pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x \to \pm\infty}[f(x)-ax]$

# 重点题型三：求渐近线

例：求曲线$y=\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)$的渐近线.

解：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)]=\infty$，$x=0$为垂直渐近线；

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)]=0$，$y=0$为水平渐近线；

$$a=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to -\infty}[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}]=-1,$$

$$b=\lim_{x\to -\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to -\infty}[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)+x]=0,$$

$y=-x$为斜渐近线.

# 重点题型四：无穷小的阶的应用

例：已知$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$，求$a,b,c$的值.

基本思路：若 $\lim\limits_{x\leftarrow x_0}\dfrac{f(x)}{(x-x_0)^k}=0$,则$f(x)$是高于 $k$阶的等价无穷小，则有

$$\lim_{x\leftarrow x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^{k-1}}=\lim_{x\leftarrow x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^{k-2}}=\cdots=\lim_{x\leftarrow x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\leftarrow x_0}f(x)=0.$$

解：由已知,$f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}$是$(x-1)$高于二阶的无穷小

所以有 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=0\Rightarrow c=2;$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0\Rightarrow b=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}=\frac{1}{2};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=0\Rightarrow a=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2-\frac{1}{2}(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{3}{16}$$

# 第二章　一元函数微分学及其应用

# 基本内容

## 导数的概念

- 导数的定义（证明题中常用）
- 导数的几何意义

# 基本内容

## 求导的基本法则

- 函数和差积商的求导法则
- 复合函数的求导法则
- 反函数的求导法则
- 常用初等函数的导数公式
- 高阶导数
- 隐函数求导法则
- 参数方程求导法则
- 相关变化率问题（期末不作为重点考查）

# 基本内容

## 微分

- 微分的定义及几何意义
- 微分运算法则
- 高阶微分
- 微分在近似计算中的作用

# 基本内容

## 微分中值定理

- 费马定理
- 罗尔定理及其推论
- 拉格朗日定理
- 柯西定理
- 洛必达法则

# 基本内容

## 泰勒定理及其应用

- 泰勒定理
- 常用初等函数的Maclaurin公式
- 泰勒公式的应用（求极限、证明不等式）

# 基本内容

## 函数性态

- 单调性
- 极值（第一、第二、第三充分条件）
- 最值
- 凹凸性

# 注意

## 常用高阶导数公式（熟记）

1) $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2});$

2) $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2});$

3) $(x^{\alpha})^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n} \quad (\alpha \in R, x > 0)';$

4) $(\frac{1}{ax + b})^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n}{(ax + b)^{n+1}} \quad (a \neq 0)$

5) $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$（选择填空常考）

## 重点题型一：用微分中值定理证明存在性问题

证明存在$\xi \in (a,b)$，使$F(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$

基本思路：观察函数间的关系特点，构造合适的辅助函数，再运用微分中值定理求解

# 重点题型一：用微分中值定理证明存在性问题

## 常用辅助函数总结

1）欲证$f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$　　令$F(x)=e^{\lambda x}f(x)$

特别的，$f'(\xi)+f(\xi)=0$，令$F(x)=e^{x}f(x)$

$f'(\xi)-f(\xi)=0$，令$F(x)=e^{-x}f(x)$

2）欲证$\xi f'(\xi)+nf(\xi)=0$　　令$F(x)=x^{n}f(x)$

3）欲证$\xi f'(\xi)-nf(\xi)=0$　　令$F(x)=x^{-n}f(x)$

4）欲证$\alpha f'(\xi)+\beta f(\xi)=0$　　令$F(x)=e^{\frac{\alpha}{\beta}x}f(x)$

5）欲证$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$　　令$F(x)=e^{g(x)}f(x)$

6）欲证$f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$　　令$F(x)=e^{\int_0^x g(x)dx}f(x)$

# 重点题型一：用微分中值定理证明存在性问题

例1：设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在 $(a,b)$内可导， $f(a)=f(b)=0$.试证：

对任意实数$\lambda$，存在$c\in(a,b)$,使$f'(c)+\lambda f(c)=0$.

解：令$F(x)=e^{\lambda x}f(x)$,对$F(x)$在区间$(a,b)$上用罗尔定理，存在$c\in(a,b)$,

使得 $F'(c)=0$， 即 $e^{\lambda c}f'(c)+\lambda e^{\lambda c}f(c)=0$.

而 $e^{\lambda c}\neq c$,所以 $f'(c)+\lambda f(c)=0$.

## 重点题型一：用微分中值定理证明存在性问题

例2：设$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且$f(a)=f(b)=0$,

$g'(x)\neq 0$.证明：存在 $\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=-\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

解:令$G(x)=e^{g(x)}f(x)$.

由题设条件知，$G(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且$G(a)=G(b)=0$.

由罗尔定理，存在$\xi\in(a,b)$，使$G'(\xi)=0$,

即$e^{g(\xi)}f'(\xi)+e^{g(\xi)}g'(\xi)f(\xi)=0$.

而$e^{g(\xi)}\neq 0$,所以$f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$.

又$g'(\xi)\neq 0$，所以$f(\xi)=-\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

# 重点题型一：用微分中值定理证明存在性问题

例：设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在$(a,b)$内可导，且$f'(x)>0$，若极限$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明在$(a,b)$内存在$\xi$，使$\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$.

解：因为$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$存在，所以$f(a)=0, f(x)>f(a)=0.$

令$F(x)=\int_a^x f(t)dt$，$G(x)=x^2$，则$F'(x)=f(x)>0$;

所以存在$\xi\in(a,b)$，$\dfrac{G(a)-G(b)}{F(a)-F(b)}=\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{G'(\xi)}{F'(\xi)}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}.$

# 重点题型二：讨论分段函数的连续性与可导性

例 3：设函数 $f(x)=\begin{cases}(\sin\frac{1}{x}\int_0^x \sin t^2 dt, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求 $f'(x)$，并讨论 $f(x)$在 $x=0$处的连续性 .

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}\dfrac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x}=0$

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\int_0^x \sin t^2 dt+\sin\dfrac{1}{x}\sin x^2, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}\int_0^x \sin t^2 dt+\sin\dfrac{1}{x}\sin x^2=0=f'(0)$，所以$f'(x)$连续.

## 重点题型三：求函数极限

### 常用方法：

- 利用函数极限的定义（很少用）
- 利用等价无穷小代换
- 利用两个重要极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$　　$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$
- 利用夹逼定理
- 利用泰勒展开
- 利用洛必达法则

## 重点题型三：求函数极限

## 常用技巧：

- 分母有理化
- 去除非零因子
- 变量代换
- 先等价无穷小后洛必达

# 重点题型三：求函数极限

例3：计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

分析：$\infty-\infty$型不定式，直接化成“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型后，用洛必达法则不易求出.

解：令$\frac{1}{x}=t$,则当$x\to\infty$时，$t\to 0$.

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\lim_{t\to 0}[\frac{1}{t}-\frac{\ln(1+t)}{t^2}]\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\ (\text{“}\frac{0}{0}\text{”型})\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+t}}{2t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

# 重点题型三：求函数极限

例3：计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}[x-x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$.

解法二：由泰勒定理知：

$$\ln(1+\frac{1}{x})=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\quad(x\to\infty),$$

则　原式$=\lim\limits_{x\to\infty}[x-x+\frac{1}{2}-x^2\cdot o(\frac{1}{x^2})]=\frac{1}{2}$.

# 重点题型四：用函数导数定义证明等式

例3：设$f(x)$在$[-l,l]$上连续，在$x=0$处可导，且$f'(0)\neq 0.$

1.任意 $x\in(0,l)$, 至少存在 $\theta\in$（0,1），使

$$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt=x[f(\theta x)-f(-\theta x)];$$

2.求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\theta.$

解：1.令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt$, 由拉格朗日定理得

$$F(x)-F(0)=xF'(\theta x)=x[f(\theta x)-f(-\theta x)].$$

2.注意到$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}$, 1中式子两边同除以$2\theta x^2$得

$$\frac{\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt}{2x^2}=\theta\cdot\frac{f(\theta x)-f(-\theta x)}{2\theta x}$$

两边取极限得, $\lim\limits_{x\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$

# 重点题型五：由参数方程确定的函数的求导问题

例3：已知$\begin{cases} x=\int_0^t e^{-u^2}du \\ y=e^{-t^2}(1+t^2) \end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解法一：$\dot{x}=e^{-t^2},\ddot{x}=-2te^{-t^2},\dot{y}=-2t^3e^{-t^2},\ddot{y}=(-6t^2+4t^4)e^{-t^2}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=-6te^{t^2}.$$

解法二：$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(-2t^3)=\frac{d}{dt}(-2t^3)\cdot\frac{dx}{dt}$

## 重点题型六：隐函数求导问题

## 基本方法与技巧

1.求由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数$y=y(x)$的二阶导数：

方法：在$F(x,y)=0$两端对$x$求导得$y'(x)$,再对$y'(x)$求导得$y''(x)$.

技巧：在求$y''(x)$之前对$y'(x)$利用原方程$F(x,y)=0$尽可能化简.

2.求由方程$F(x,y)=0$所确定的隐函数$y=y(x)$在一点$x_0$处的一阶导数值$y'(x_0)$和二阶导数值$y''(x_0)$.

技巧：不用求出$y'(x)$表达式，直接对求导所得的等式两端再对$x$求导，从得到的两个等式中解出$y'(x_0)$和$y''(x_0)$.

# 重点题型六：隐函数求导问题

例：$y=1+xe^{xy}$，求$y''$.

解：$y'=xe^{xy}(y+xy')+e^{xy}=e^{xy}(x^2y'+xy+1)$.

用$y=1+xe^{xy}$将上式化简得

$$y'=e^{xy}+(y-1)(y+xy').$$

两边对$x$求导得$y''$.

# 重点题型七：复合函数求导问题

例：$y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

解：$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}[1+\frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}[1+\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}]$$

例：曲线$y=(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$的拐点是（ ）.

$A.(1,0)$ $B.(2,0)$ $C.(3,0)$ $D.(4,0)$

解法一：令 $f(x)=(x-1)^4S(x)$,

$$f'(x)=4(x-1)^3S(x)+(x-1)^4S'(x),$$

$$f''(x)=(x-1)^2[12S(x)+8(x-1)S'(x)+(x-1)^2S''(x)],$$

$S(1)\neq 0, f''(x)$在$x=1$两侧不变号，所以（1,0）不是拐点.

同样的方法可判断(2,0)是拐点,选B.

解法二 :穿跟法（奇过偶不过）

# 第三章　一元函数积分学及其应用

## 基本内容

### 定积分的定义、存在条件与性质

- 定积分的定义（求解比较复杂的极限时有时会用到）
- 定积分的存在条件
- 定积分的性质（线性性质、单调性、介值性、绝对值积分、区间可加性、乘积性质、积分中值定理）

# 基本内容

## 微积分基本公式与基本定理

- 微积分基本公式（牛顿-莱布尼兹公式）
- 微积分基本定理（第一、第二）
- 不定积分（熟记常用函数的不定积分）

# 基本内容

## 两种基本积分法

- 换元积分法（换元法则1，换元法则2）
- 分部积分法

# 基本内容

## 定积分的应用

- 微元法的建立
- 定积分的几何应用（平面图形面积，旋转体体积）
- 定积分的物理应用（细棒质量、引力，做功）

# 基本内容

## 反常积分

- 无穷区间上的积分
- 无界函数的积分
- 反常积分的审敛准则（比较准则1、2，绝对收敛准则）
- $\Gamma$ 函数（不考）

# 基本内容

## 微分方程

- 微分方程的基本概念（通解、特解）
- 可分离变量的一阶微分方程
- 一阶线性微分方程
- 可用变量代换法求解的一阶微分方程
- 可降阶的高阶微分方程
- 微分方程的应用（期末很少涉及）

# 注意

## 熟记常用基本函数的积分公式

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C \qquad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C \qquad \int x\ln x dx = x\ln x - x + C$$

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C \qquad \int x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx == 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \qquad \int \sec x dx = \ln|sex + \tan x| + C \qquad \int \csc x dx = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \begin{cases} \dfrac{n-1}{n} \cdot \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot 1 & n\text{为奇数} \\ \dfrac{n-1}{n} \dfrac{n-3}{n-2} \cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & n\text{为偶数} \end{cases}$$

# 重点题型一：定积分与不定积分的求解

## 基本方法：

- 换元积分法一（凑微分）
- 换元积分法二：如果被积函数中有：

1) $\sqrt{a^2-x^2}$　令$x=a\sin t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.　2) $\sqrt{x^2+a^2}$　令$x=a\tan t$，$t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

3) $\sqrt{x^2-a^2}$　令$x=a\sec t$，当$x>a$时，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$；当$x<a$时，$t\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

4) $\sqrt[n]{ax+b}$　令$\sqrt[n]{ax+b}=t$，将根式消去.

另：半角代换（又称万能代换）：令$t=\tan\frac{x}{2}$，则有(记住）：

$$\sin t=\frac{2t}{1+t^2},\cos t=\frac{1-t^2}{1+t^2},\tan t=\frac{2t}{1-t^2},dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

注意：半角代换是求解三角有理函数积分的普适方法，但不一定是最简方法。

- 分部积分法

# 重点题型一：定积分、不定积分与广义积分的求解

例：$\int x^3\sqrt{4-x^2}dx$

## 解法一：凑微分法

$$原式=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\int[(4-x^2)-4]\sqrt{4-x^2}d(4-x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int[(4-x^2)^{\frac{3}{2}}-(4-x^2)^{\frac{1}{2}}]\sqrt{4-x^2}d(4-x^2)=\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

## 解法二：换元法

$$原式=\frac{1}{2}\int x^2\sqrt{4-x^2}d(x^2),令\sqrt{4-x^2}=t,则x^2=4-t^2,d(x^2)=-2tdt.$$

$$原式=\frac{1}{2}\int(4-t^2)t(-2t)dt=\int(t^4-4t^2)dt=\frac{1}{5}t^5-\frac{4}{3}t^3+C$$

## 解法三：另一种换元法

$$令x=2\sin t,则t=\arcsin\frac{x}{2}.$$

$$原式=\int(2\sin t)^3\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt=32\int\sin^3 t\cos^2 tdt=-32\int\sin^2 t\cos^2 td\cos t=-32\int(1+-\cos^2 t)\cos^2 td\cos t$$

$$=-32(\frac{\cos^3 t}{3}-\frac{\cos^5 t}{5})+C=-\frac{4}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{5}(4-x^2)^{\frac{5}{2}}+C$$

## 重点题型二：微积分的几何应用

## 基本方法：微元法

例：设曲线$l_1$的方程为$y=a\ln x$(其中常数$a>0$),曲线$l_1$的一条切线$l_2$过原点.

1.求曲线$l_1$,切线$l_2$以及与$x$轴围成的平面图形的面积.

2.求此平面图形绕$y$轴旋所成的旋转体的面积.

解:1.设切点$(x_0,a\ln x_0)$,则切线方程为$y-a\ln x_0=\dfrac{a}{x_0}(x-x_0)$.

将$x=0,y=0$代入得$x_0=e$,所以切线方程为$y=\dfrac{a}{e}x$.

$$S=\frac{1}{2}ae-\int_1^e a\ln x dx=\frac{1}{2}a(e-2)$$

$$2.V=2\pi\int_1^e xa\ln x dx-2\pi\int_0^e x(\frac{a}{e}x)dx=\frac{\pi}{6}e^2-\frac{\pi}{2}a$$

# 重点题型三：微分方程求解

## 基本方法

1.形如$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$　　分离变量法.

2.形如$y'+P(x)y=0$　　$y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

3.形如$y'+P(x)y=Q(x)$　　$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$.

4.形如$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$　　令$u=\dfrac{y}{x}$.

5.形如$y'+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}$　　两端同除以$y^{\alpha}$并令$u=y^{1-\alpha}$.

6.形如$y^{(n)}=f(x)$　　$n$次积分.

7.形如$y''=f(x,y')$　　令$y'=p$.

8.形如$y''=f(y,y')$　　令$y'=p$.

# 重点题型三：微分方程求解

例：求方程 $\dfrac{dx}{dt}-tx=t^3x^2$ 的通解.

解：原方程为Bernoulli方程，令 $u=x^{-1}$,则 $\dfrac{du}{dt}=-x^{-1}\dfrac{dx}{dt}$.

原方程变为非齐次线性方程 $\dfrac{du}{dt}+tu=-t^3$.

通解为 $u=e^{-\int tdt}(\int -t^3e\int tdt+C)=2-t^2-Ce^{-\frac{1}{2}t^2}$.

从而得原方程的通解为 $x=\dfrac{1}{2-t^2-Ce^{-\frac{1}{2}t^2}}$.

注意，$x=0$ 也是原微分方程的解，但不能包含在通解中.

# 重点题型四：广义积分的审敛问题

## 基本方法

- 两个比较准则（仅适用于定号函数）
- 绝对收敛准则

掌握两个$p$积分：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx(p>0)$ 当$p>1$时收敛，当$p\leq$时发散；

$\int_a^b\frac{1}{(x-a)^p}dx(a<b,p>0)$ 当$p<1$时收敛，当$p\geq 1$时发散.

## 重点题型四：广义积分的审敛问题

### 注意：

1.无穷区间的$p$积分下限为1，当下限为0时，应利用积分的区间可加性分成两个积分的和，再分别判定这两个积分是否收敛

2.在判定无界函数的敛散性时，分清奇点是上限还是下限.

# 重点题型四：广义积分的审敛问题

例：设广义积分$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$收敛，证明广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$绝对收敛.

解：因为$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \le \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2} + f^2(x)\right]$, 而$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$和$\int_1^{+\infty} f^2(x)dx$都收敛，

所以广义积分$\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x}dx$绝对收敛.

例：计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}[\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}]=$________.

解：$\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}})\le\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}+\dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\cdots+\dfrac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\le\dfrac{1}{n}(\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\dfrac{n}{n}})$

右边极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1\sqrt{x}dx=\dfrac{2}{3}$,

左边极限$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\sqrt{\dfrac{1}{n}}+\sqrt{\dfrac{2}{n}}+\cdots\sqrt{\dfrac{n}{n}})=1\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}$.

由夹逼性知原级数极限为$\dfrac{2}{3}$.

# 第四章 无穷级数

# 基本内容

## 常数项级数

- 常数项级数的概念、性质(1.3最重要）与收敛原理（Cauchy收敛原理）
- 正项级数的审敛准则
- 变号级数的审敛准则（莱布尼兹准则、绝对收敛准则）

# 基本内容

## 函数项级数

- 函数项级数的处处收敛性
- 函数项级数的一致收敛性与判别方法
- 一致收敛级数的性质(和函数连续性、可积性、可导性)

# 基本内容

## 幂级数

- 幂级数及其收敛半径（注意阿贝尔定理和收敛半径公式）
- 幂级数的运算性质
- 函数展开成幂级数（熟记常用函数的展开式）
- 幂级数的应用（近似计算）

# 基本内容

## Fourier级数

- 周期函数与三角函数
- 三角函数的正交性与Fourier系数公式
- 周期函数的Fourier展开（注意正弦级数、余弦级数）
- 定义在$[0,l]$上的Fourier展开（奇延拓、偶延拓）
- Fourier级数的复数形式（不考）

# 注意

$p$ 级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p}}$：　　$p>1$时收敛，　　$p\le 1$时发散　．

常用初等函数的幂级数展开式（注意收敛区间）

$$e^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\qquad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}\qquad x\in(-1,1].$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{n}\qquad x\in(-1,1).$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n}\qquad x\in(-1,1).$$

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}\qquad x\in(-1,1)$$（用的相对较少）

## 重点题型一：级数的审敛问题

## 基本方法

1.一般:1)定义：部分和数列$\{S_n\}$有极限;(对应数列审敛中的单调 有界准则）

2)级数性质：级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (常用于判定级数不收敛）；

3)Cauchy收敛原理(只针对特殊类型好用,考查较少）；

2.正项级数:1)部分和数列$\{S_n\}$有上界;

2）两个比较准则(大的收敛，小的收敛;小的发散，大的发散）；

3)积分准则(难点）；

4)检比法、检根法;

3.变号级数:1)莱布尼兹准则（针对交 错级数);

2)绝对收敛准则

# 重点题型一：级数的审敛问题

例:判断下列级数的收敛性:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$

解：当$n\to\infty$时，$\ln(\frac{n+2}{n})=\ln(1+\frac{2}{n})\sim\frac{2}{n}$，$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$，

从而$\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln(\frac{n+2}{n})\sim\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$.

利用比较准则2，$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln(\frac{n+2}{n})/\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n+1}}\cdot\frac{\ln(1+\frac{2}{n})}{\frac{1}{n}}=2.$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，所以原级数收敛 .

# 重点题型一：级数的审敛问题

例:判断下列级数的收敛性:$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$

解：$a_n=\frac{n^{n-1}}{n^{n+1}(2+\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2})^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{1}{n^2(2+\frac{\ln n}{n^2}+\frac{1}{n^2})^{\frac{n+1}{2}}}\le\frac{1}{n^2}$

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，由比较准则 2知原级数收敛 .

# 重点题型一：级数的审敛问题

例:判断下列级数是否收敛，若收敛，是条件收敛还是绝对收敛?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})\ (a\neq 0)$$

解：$a_n=\sin(\pi\sqrt{a^2+n^2})=\sin[\pi(\sqrt{a^2+n^2}-n)+n\pi]=(-1)^n\sin\pi(\sqrt{a^2+n^2}-n)$

$$=(-1)^n\sin\frac{a^2\pi}{\sqrt{a^2+n^2}+n}$$

这是一个交错级数，由 leibniz 准则知其收敛 .

又 $|a_n|=\sin\dfrac{a^2\pi}{\sqrt{a^2+n^2}+n}\sim\dfrac{a^2\pi}{2n}(n\to\infty)$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散,

所以原级数条件收敛.

## 重点题型二：函数项级数一致收敛的判定

## 基本方法

1.证明一致收敛：1)一致收敛的定义；

2)$M$判别准则（通过放缩去掉$x$);

2.证明不一致收敛：1)一致收敛定义的逆否命 题;

2)证明不处处收敛

3)证明和函数在所给区间上不连续

另：Cauchy一致收敛原理（很少用）

# 重点题型二：函数项级数一致收敛的判定

例:求函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}$的和函数，并证明：对$\forall \delta > 0$,级数在$[\delta,+\infty)$上一致收敛，但在其收敛域内不一致收敛.

解：$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}, x \in (0,\infty)$（等比数列求和）

对$\forall \delta > 0$,由$x_0 = \dfrac{\delta}{2}$时级数$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\frac{\delta}{2}} = \dfrac{1}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}}$收敛.

而$x \in [\delta,+\infty)$时，$e^{-nx} < e^{-n\frac{\delta}{2}}$,有M判别法知级数在$[\delta,+\infty)$上一致收敛.

而由$\lim_{x\to 0^+} S(x) = \infty$知和函数$S(x)$不连续，所以原级数在$(0,+\infty)$不一致收敛.

## 重点题型三：和函数可导性的判定

## 基本方法

判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$是否可以逐项求导.

1) $u_n(x) \in C^{(1)}(I)$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$处处收敛;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$一致收敛;

# 重点题型三：和函数可导性的判定

例：判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$在$x\in(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性，并讨 论是否可以逐项求导.

解：$\left|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\le\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，所以原级数一致 收敛.

而$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\cos(n+\frac{1}{2})x-\frac{4x^2}{3(n^4+x^4)^{\frac{4}{3}}}\sin(n+\frac{1}{2})x\right]$在$x=2k\pi$发散，

所以原级数不可逐项求 导.

# 重点题型四：幂级数的和函数求解

例：求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n+1)3^n}$的收敛域与和函数.

解：原式$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)3^n}=\frac{1}{x}S(x)$,

其中$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{3^n}=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\frac{x^2}{3})^n=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{x^2}{3})^n+1=-\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}+1=\frac{x^2}{x^2+3}$,

两端积分得 $S(x)=\int_0^x\frac{x^2}{x^2+1}dx=x-\sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$.

所以原式 $=1-\frac{\sqrt{3}}{x}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$,收敛区域为$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

注意：幂级数收敛区域 求解方法，先求出收敛 区间，不缺项时用幂级 数收敛半径公式，缺项时用检比法，同时 检验原级数在端点处是 否收敛，从而得出收敛 区域.

# 重点题型五：将函数展开成幂级数

例：将函数$f(x)=\dfrac{1}{1-x-2x^2}$在$x_0=0$处展开成幂级数.

解：$$f(x)=\frac{1}{(1-2x)(1+x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{1-2x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}x^n$$

收敛区域为$(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$.

注意：将函数展开成幂 级数后，务必指明收敛 域，

收敛域的确定用已有函 数的幂级数收敛域确定 比较简便.

# 重点题型六：将函数展开成Fourier级数

例：将函数$f(x)=\begin{cases}0,-2\le x\le 0\\ x,0<x<2\end{cases}$展开为以4为周期的fourier级数.

解：$a_0=\dfrac{1}{2}\int_0^2 xdx=1,\qquad a_n=\dfrac{1}{2}\int_0^2 x\cos\dfrac{n\pi x}{2}dx=\dfrac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2},$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{2(-1)^n}{n\pi}.$$

$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}-\frac{2(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

由Dirichlet定理，$S(x)=\begin{cases}f(x),-2<x<2\\ 1,\qquad x=\pm 2\end{cases}$ (最好写上）

PPT及往年试题获取方式：

加入南辅答疑群（185944600），

从群文件下载

谢谢大家！